

Përmbajtja

Parathënie

iii

Kapitulli 1 Hyrje në Analizën Matematike

1

| | |
|---|-----------|
| <i>1.1. Përsëritje të njohurive nga shkolla e mesme për bashkësitë, numrat reale dhe funksionet</i> | <i>1</i> |
| <i>1.1.1 Bashkësitë</i> | <i>1</i> |
| <i>1.1.2 Simbole të logjikës matematike</i> | <i>5</i> |
| <i>1.1.3 Numrat reale</i> | <i>7</i> |
| <i>1.1.4 Madhësitë konstante dhe madhësitë e ndryshueshme</i> | <i>11</i> |
| <i>1.1.5 Funksioni</i> | <i>11</i> |
| <i>1.1.6 Ushtrime</i> | <i>19</i> |
| <i>1.2. Vargu numerik</i> | <i>30</i> |
| <i>1.2.1 Përkufizimi i vargut</i> | <i>30</i> |
| <i>1.2.2 Vargjet monotone</i> | <i>31</i> |
| <i>1.2.3 Vargjet e kufizuara</i> | <i>32</i> |
| <i>1.2.4 Limiti i vargut</i> | <i>32</i> |
| <i>1.2.5 Tre veti të vargjeve konvergjente</i> | <i>35</i> |
| <i>1.2.6 Rregullat e kalimit në limit</i> | <i>36</i> |
| <i>1.2.7 Limiti i vargjeve monotone. Numri e</i> | <i>39</i> |
| <i>1.2.8 Vargu i segmenteve që shtrëngohen. Teorema e Kantorit</i> | <i>40</i> |
| <i>1.2.9 Nënvargu. Pika limite e vargut</i> | <i>42</i> |
| <i>1.2.10 Teorema Bolcano-Vajershtas</i> | <i>43</i> |
| <i>1.2.11 Vargjet pambarimisht të vegjël dhe vargjet pambarimisht të mëdhenj</i> | <i>44</i> |
| <i>1.2.12 Ushtrime</i> | <i>47</i> |
| <i>1.3. Limiti i funksionit</i> | <i>48</i> |
| <i>1.3.1 Përkufizimi i limitit të funksionit në gjuhën e vargjeve</i> | <i>49</i> |
| <i>1.3.2 Përkufizimi i limitit të funksionit në gjuhën “$\epsilon - \delta$”</i> | <i>49</i> |
| <i>1.3.3 Vetitë të limitit të funksionit</i> | <i>50</i> |
| <i>1.3.4 Ruajtja e shenjës së funksionit që ka limit të ndryshëm nga zero</i> | <i>51</i> |
| <i>1.3.5 Madhësitë pambarimisht të vogla dhe madhësitë pambarimisht të mëdha</i> | <i>52</i> |
| <i>1.3.6 Limiti në pikën e pafundme</i> | <i>54</i> |
| <i>1.3.7 Limitet e njëanshme</i> | <i>55</i> |
| <i>1.3.8 Ushtrime</i> | <i>56</i> |
| <i>1.4. Vazhdueshmëria e funksionit</i> | <i>59</i> |
| <i>1.4.1 Përkufizimi i vazhdueshmërisë</i> | <i>59</i> |
| <i>1.4.2 Vetitë të funksioneve të vazhdueshëm</i> | <i>60</i> |
| <i>1.4.3 Vazhdueshmëria e funksionit të përbërë</i> | <i>60</i> |
| <i>1.4.4 Vetitë të funksionit të vazhdueshëm në segment</i> | <i>61</i> |

vi Përmbajtja

| | | |
|--------|--|----|
| 1.4.5 | Ekzistenca dhe vazhdueshmëria e funksionit të anasjelltë të një funksioni monoton dhe të vazhdueshëm | 63 |
| 1.4.6 | Ushtrime | 64 |
| 1.5. | Funksionet elementare | 65 |
| 1.5.1 | Funksionet elementare themelore | 65 |
| 1.5.2 | Funksionet racionale | 66 |
| 1.5.3 | Funksionet e thjeshta irracionale | 69 |
| 1.5.4 | Funksionet trigonometrike | 70 |
| 1.5.5 | Funksionet e anasjellta trigonometrike | 73 |
| 1.5.6 | Funksioni eksponencial | 76 |
| 1.5.7 | Funksioni logaritmik | 77 |
| 1.5.8 | Funksioni fuqi | 77 |
| 1.5.9 | Funksioni eksponencialo-fuqi dhe tri papërcaktueshmëritë | 78 |
| 1.5.10 | Vazhdueshmëria e funksioneve elementare | 79 |
| 1.5.11 | Ushtrime | 81 |
| 1.6. | Ushtrime plotësuese për kapitullin 1 | 82 |

Kapitulli 2 Njehsimi diferencial i funksioneve numerike me vlera numerike 85

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.1. | Dy probleme që na çojnë në konceptin e derivatit | 85 |
| 2.2. | Përkufizimi i derivatit | 87 |
| 2.3. | Derivatet e njëanshme | 90 |
| 2.4. | Lidhja e derivueshmërisë me vazhdueshmërinë | 91 |
| 2.5. | Derivatet e pafundme | 92 |
| 2.6. | Derivati i disa funksioneve elementare themelore | 93 |
| 2.7. | Rregullat e derivimit | 95 |
| 2.8. | Derivimi i funksioneve të anasjelltë. Derivimi i harkfunksioneve | 98 |
| 2.9. | Derivati i funksionit të përbërë | 100 |
| 2.10. | Funksionet hiperbolike dhe derivimi i tyre | 103 |
| 2.11 | Tabela e derivateve | 105 |
| 2.12. | Diferenciali. Kuptimi gjeometrik i diferencialit | 105 |
| 2.13. | Derivatet e rendeve të larta | 109 |
| 2.14. | Diferencialet e rendeve të larta | 111 |
| 2.15. | Teoremat themelore të njehsimit diferencial | 112 |
| 2.16. | Rregullat e l'Hopitalit | 118 |
| 2.17. | Formula e Tejlorit dhe zbatimet e saj | 121 |
| 2.18. | Përdorimi i formulës së Tejlorit për llogaritjen e vlerave të funksionit | 124 |
| 2.19. | Studimi i funksioneve me anën e derivatit | 124 |
| 2.20. | Ekstremumet e funksionit | 127 |
| 2.21. | Vlera më e madhe dhe vlera më e vogël e funksionit në segment | 131 |
| 2.22. | Përkulshmëria e vijës. Pikat e infleksionit | 132 |
| 2.23. | Asimptotat | 135 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 2.24. | <i>Plani i përgjithshëm i studimit të funksionit</i> | 137 |
| 2.25. | <i>Ushtrime</i> | 141 |

Kapitulli 3 Integrali i pacaktuar **150**

| | | |
|------|--|-----|
| 3.1. | <i>Përkufizimi i integralit të pacaktuar</i> | 150 |
| 3.2. | <i>Tabela e integraleve themelore</i> | 152 |
| 3.3. | <i>Vetitë themelore të integralit të pacaktuar</i> | 154 |
| 3.4. | <i>Integrimi me zëvendësim</i> | 157 |
| 3.5. | <i>Metoda e integrimit me pjesë</i> | 161 |
| 3.6. | <i>Integrimi i funksioneve racionale thyesore</i> | 164 |
| 3.7. | <i>Integrimi i disa funksioneve irracionale</i> | 171 |
| 3.8. | <i>Integrimi i disa funksioneve trigonometrike</i> | 176 |
| 3.9. | <i>Ushtrime</i> | 178 |

Kapitulli 4 Integrali i caktuar **184**

| | | |
|-------|---|-----|
| 4.1. | <i>Syprina e trapezit vijëpërkulur</i> | 184 |
| 4.2. | <i>Puna e një force të ndryshueshme gjatë zhvendosjes drejtvizore</i> | 185 |
| 4.3. | <i>Përkufizimi i integralit dhe kushti i nevojshëm i ekzistencës së tij</i> | 186 |
| 4.4. | <i>Veti të integralit të caktuar të shprehura me barazime</i> | 189 |
| 4.5. | <i>Veti të integralit të caktuar të shprehura me mosbarazime</i> | 191 |
| 4.6. | <i>Integrali i caktuar si funksion i kufirit të sipërm</i> | 193 |
| 4.7. | <i>Formula e Njuton-Laibnicit</i> | 196 |
| 4.8. | <i>Metodat themelore të llogaritjes së integralit të caktuar</i> | 198 |
| 4.9. | <i>Teorema mbi të mesmen</i> | 202 |
| 4.10. | <i>Zbatime të integralit të caktuar</i> | 204 |
| 4.11. | <i>Gjatësia e vijës (harkut)</i> | 207 |
| 4.12. | <i>Syprina e sipërfaqes së rrotullimit</i> | 208 |
| 4.13. | <i>Vëllimi i trupit të rrotullimit</i> | 209 |
| 4.14. | <i>Ushtrime</i> | 210 |

Kapitulli 5 Zbatime të derivateve dhe integraleve në ekonomi **218**

| | | |
|------|---|-----|
| 5.1. | <i>Kostoja e prodhimit</i> | 218 |
| 5.2. | <i>Të ardhurat</i> | 222 |
| 5.3. | <i>Elasticiteti i funksionit</i> | 225 |
| 5.4. | <i>Disa veti të elasticitetit të funksionit</i> | 226 |
| 5.5. | <i>Elasticiteti i funksionit të kërkesës</i> | 227 |
| 5.6. | <i>E ardhura kombëtare dhe konsumi</i> | 231 |
| 5.7. | <i>Ushtrime</i> | 232 |

Kapitulli 6 Përgjithësim i konceptit të integralit 234

| | | |
|------|--|-----|
| 6.1. | <i>Integrali i përgjithësuar i llojit të parë</i> | 234 |
| 6.2. | <i>Disa veti të integralit të përgjithësuar të llojit të parë</i> | 237 |
| 6.3. | <i>Konvergenca absolute dhe e kushtëzuar</i> | 241 |
| 6.4. | <i>Integrali i përgjithësuar i llojit të dytë</i> | 242 |
| 6.5. | <i>Kritere të konvergjencës së integralit të përgjithësuar të llojit të dytë</i> | 244 |
| 6.6. | <i>Ushtrime</i> | 245 |

Kapitulli 7 Funksionet me dy e më shumë ndryshore 248

| | | |
|-------|---|-----|
| 7.1. | <i>Përkufizimi i funksionit me shumë ndryshore</i> | 248 |
| 7.2. | <i>Grafiku i funksionit me dy ndryshore</i> | 249 |
| 7.3. | <i>Limiti dhe vazhdueshmëria</i> | 252 |
| 7.4. | <i>Vazhdueshmëria</i> | 255 |
| 7.5. | <i>Derivatet e pjesshme</i> | 257 |
| 7.6. | <i>Kuptimi gjeometrik i derivatit të pjesshëm të funksionit me dy ndryshore</i> | 258 |
| 7.7. | <i>Derivatet e pjesshme të rendeve të larta</i> | 259 |
| 7.8. | <i>Vektor gradienti dhe matrica Hessiane</i> | 261 |
| 7.9. | <i>Diferenciali i plotë</i> | 266 |
| 7.10. | <i>Diferencialet e rendeve të larta</i> | 269 |
| 7.11. | <i>Derivati i funksionit të përbërë</i> | 271 |
| 7.12. | <i>Funksionet homogjenë. Teorema Euler</i> | 274 |
| 7.13. | <i>Derivatet e pjesshme të funksioneve të përbërë</i> | 275 |
| 7.14. | <i>Ekstremumet e funksionit me shumë ndryshore</i> | 276 |
| 7.15. | <i>Vlerat ekstremale në bashkësinë e mbyllur dhe të kufizuar</i> | 280 |
| 7.16. | <i>Funksionet e pashtjellur</i> | 282 |
| 7.17. | <i>Ushtrime</i> | 284 |

Kapitulli 8 Ekuacionet diferenciale 287

| | | |
|--------|---|-----|
| 8.1. | <i>Ekuacionet diferenciale të rendit të parë</i> | 287 |
| 8.1.1. | <i>Vijat integrale</i> | 288 |
| 8.1.2. | <i>Problemi Koshi. Zgjidhja e përgjithshme</i> | 288 |
| 8.1.3. | <i>Ekuacione me ndryshore të ndarë</i> | 290 |
| 8.1.4. | <i>Ekuacionet homogjenë</i> | 293 |
| 8.1.5. | <i>Ekuacionet lineare të rendit të parë</i> | 295 |
| 8.1.6. | <i>Ekuacioni Bernuli</i> | 297 |
| 8.2. | <i>Ekuacionet diferenciale lineare të rendit të dytë me koeficienta konstantë</i> | 299 |

| | |
|--|------------|
| 8.2.1. Zgjidhja e ekuacionit linear homogjen të rendit të dytë me koeficienta konstantë | 300 |
| 8.2.2. Zgjidhja e ekuacionit linear jo homogjen të rendit të dytë me koeficienta konstantë | 302 |
| 8.3. Ushtrime | 304 |
| | |
| Kapitulli 9 Seritë numerike | 307 |
| 9.1. Përkufizimi | 307 |
| 9.2. Disa veti të serive | 308 |
| 9.3. Seritë me kufiza pozitive | 311 |
| 9.3.1. Kriteret e konvergjencës së serive me terma pozitive | 311 |
| 9.4. Seritë alternative | 316 |
| 9.5. Seritë me kufiza të çfarëdoshme | 317 |
| 9.6. Seritë polinomiale | 318 |
| 9.7. Derivimi dhe integrimi i serive polinomiale | 321 |
| 9.8. Zbërthimi i funksionit në seri polinomiale | 322 |
| 9.9. Zbërthimi i disa funksioneve elementarë në seri Tejlor | 324 |
| 9.10. Ushtrime | 326 |